

文章编号: 1000-8055(2010)07-1634-08

失谐叶盘结构鲁棒性能分析

姚建尧, 王建军, 李其汉

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 在状态空间内建立了失谐叶盘结构的传递函数模型, 以失谐传递函数矩阵的结构奇异值为指标, 研究了各种失谐参数对叶盘结构鲁棒性能的影响. 在此基础上对一个扇区两自由度的简化叶盘结构模型进行分析, 考虑了激励阶次、阻尼、失谐程度和人为失谐等因素对系统鲁棒性能的影响. 计算结果表明: 增加系统阻尼, 将失谐范围控制在阈值以外, 以及在系统中引入适当形式的人为失谐等三种措施都能有效地提高叶盘结构的鲁棒性能.

关 键 词: 失谐; 叶盘结构; 鲁棒性能; 结构奇异值; 人为失谐

中图分类号: V231.3

文献标识码: A

Robust performance analysis of mistuned bladed disks

YAO Jian-yao, WANG Jian-jun, LI Qi-han

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The transfer matrix model of the mistuned bladed disk was constituted in the state space. The effects of mistuning parameters on robust performance of mistuned bladed were evaluated using the structured singular value (SSV) of the mistuned transfer matrix. The robust performance of a simplified bladed disk model with two-degree-of-freedom per sector was analyzed. The influences of excitation order, damping, mistuning strength and intentional mistuning on the robust performance of the system were also considered. The numerical results indicate that, the robust performance of the mistuned bladed disk could be effectively enhanced by increasing the system damping, keeping the mistuning strength beyond the threshold value, and by introducing some appropriate intentional mistuning to the system.

Key words: mistuning; bladed disk; robust performance; structured singular value; intentional mistuning

由于加工误差和使用中的不均匀磨损等因素, 叶盘结构中的叶片总是不可避免地存在着微小的差别, 这些差别称为失谐. 理论和试验研究表明, 失谐会对叶盘结构的动态特性产生明显的影响, 主要表现为模态局部化和振动传递局部化两个方面. 某些失谐会使叶片应力大幅上升, 造成叶片的提前失效. 因此, 有效地预测和抑制随机失谐的不利影响对于发动机的结构完整性和工作可靠

性是至关重要的, 国内外的学者对此也进行了深入的研究^[1-4], 采用的方法主要有统计分析和确定性分析两种.

统计方法是计算随机失谐叶盘结构动态特性最为直接的方法, 它通过大量的抽样计算得到固有频率、模态局部化系数以及幅值放大比等重要参数的均值、最值和标准差等统计特征参数, 在某些情况下还可以通过参数检验得到这些动态特性

收稿日期: 2009-06-11; 修订日期: 2009-08-29

基金项目: 国家高技术研究发展计划(2008AA04Z403)

作者简介: 姚建尧(1981-), 男, 河北衡水人, 博士生, 主要从事航空发动机结构振动及振动控制等研究.

参数的概率密度函数.这种方法有两点不足:首先,由于结构失谐后失去了周期对称性,在计算中不得不采用整体模型,这大大提高了计算负荷,尤其是对于大型有限元模型,这种大量抽样计算的成本是很高的;第二,由于抽样过程的随机性和有限性,并不能保证得到使系统性能达到最值的失谐情况,如使系统响应最大的最坏失谐情况等.为了解决上面两个问题,国内外的学者开发了各种减缩模型^[5-12]和确定性的优化算法^[13-21].

上面两种方法都是以直接得到系统的响应参数(自由响应和受迫响应)为目的的,并不能反映出失谐参数对系统性能整体上的影响.而系统的鲁棒性指标从本质上反映了不确定参数对系统性能的影响,从这个角度出发,失谐参数可以通过系统不确定性来表达,各种动态特性参数对失谐参数的敏感程度也可以通过系统的鲁棒性参数(H_2 范数, H_∞ 范数,结构奇异值等)来衡量.这种方法的优势在于它更为全面地定量描述参数不确定性对系统鲁棒性的影响,并可以通过控制率的设计来提高系统的鲁棒性,使其在存在各种不确定性情况下仍旧保持良好的工作性能.

Rotea 和 D'Amato^[22]基于鲁棒控制的思想,在考虑有界随机失谐的情况下计算了使叶片轮盘响应最大的失谐模式.这里,我们采用结构奇异值来评价各种失谐参数对叶盘结构系统鲁棒性的影响.本文首先在状态空间中给出了叶盘结构的鲁棒分析模型,在此基础上对一个简化的叶盘结构模型进行了鲁棒性能分析,考虑了不同激励阶次和不同程度的叶片刚度失谐和阻尼失谐对系统鲁棒性能的影响.

同时,有研究表明^[23-26],适当形式的人为失谐能有效降低随机失谐的不利影响,提高系统的鲁棒性,本文也考虑了谐波形式的人为失谐对系统鲁棒性能的影响.

1 失谐叶盘结构的分析模型

1.1 失谐系统的传递函数

失谐结构的矩阵可以写成谐调矩阵和摄动矩阵的叠加的形式

$$\begin{aligned} M &= M_0 + \sum_{i=1}^n M_i \delta_i \\ C &= C_0 + \sum_{i=1}^n C_i \delta_i \\ K &= K_0 + \sum_{i=1}^n K_i \delta_i \end{aligned} \quad (1)$$

其中 M , K 和 C 分别表示失谐系统的质量、刚度和阻尼矩阵,下标为“0”的代表相应的谐调矩阵,标量参数组成的向量 δ 反映谐调系统的参数不确定性,可以用 $\delta \in [-1, 1]$ 来规定它们.

系统的运动方程在状态空间中可以表示为

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [H \quad 0] \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中向量 u 表示激励,向量 y 表示输出,矩阵 G 和 H 分别表示输入和输出矩阵.叶盘结构中,叶片主要受尾迹激励,其特点为各叶片的激励幅值相等,在给定的阶次下,相邻叶片间的激励存在恒定相位差,即第 i 个叶片的激励为

$$u_i = F e^{-i E \theta} \quad (3)$$

其中 F 为激励幅值, E 为激励阶次.

$$\theta = \frac{2\pi E}{N} \quad (4)$$

是行波激励的叶片间相位角, N 为叶片数.

取状态向量为 $z = \{x^T \quad \dot{x}^T\}^T$, 则式(2)的方程可以改写为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Gu \\ y = Hz + Du \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}G \end{bmatrix}$$

$$H = [H \quad 0], \quad D = 0$$

为了保证方程中各项维数的一致,输入矩阵 G 和输出矩阵 H 都做了适当的增广.

对于刚度失谐的情况,根据式(1),矩阵 A 可以写为

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^k \delta A_i \quad (6)$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K_i & 0 \end{bmatrix}$$

A_0 为谐调系统的系统矩阵, δA_i 的满秩分解为

$$\delta A_i = L_i \delta_i R_i \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{diag}\{\delta_1 I, \dots, \delta_k I\} \\ L &= [L_1 \quad \dots \quad L_k] \\ R &= [R_1^T \quad \dots \quad R_k^T]^T \end{aligned} \quad (8)$$

最终,失谐系统的传递函数矩阵可以通过线性分式变换来表示

$$G_s(\Delta) = F_u \left[F_l \left[\begin{bmatrix} A_0 & G & L \\ H & D & 0 \\ R & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta, \frac{1}{s} I \right] \right] \quad (9)$$

1.2 结构奇异值和系统鲁棒性能

矩阵 M' (这里是指一般矩阵,而不是前面的质量矩阵) 的结构奇异值 (structured singular value, SSV) 定义为^[27]

$$\mu(M') = \frac{1}{\min\{\sigma(\Delta) : \det(I - M'\Delta) = 0\}} \quad (10)$$

其物理意义为使反馈系统失稳的最小矩阵,即系统能够允许多大的失谐;结构奇异值越大,说明系统能够允许的失谐范围越小,系统的鲁棒性能越差.结构奇异值是衡量系统鲁棒性的重要指标,但由于其精确值的计算是一个“NP hard (non-deterministic polynomial-time hard)”问题,因此经常用其上界和下界来代替,结构奇异值的真实值必然落在上下界之间.

为了得到结构奇异值,首先需要建立求解的 $M'\Delta$ 模型,矩阵 M' 不仅描述了标称系统的闭环特性,还描述了不确定性是作为反馈引入系统的途径.对于失谐叶盘结构,式(9)描述的失谐叶盘结构传递函数恰好满足这样的要求.因此,我们通过求解 G_s 的结构奇异值的界来描述系统的鲁棒性能.

2 简化的叶盘结构

简化叶盘结构的模型如图 1 所示,图中每个扇区有两个自由度,分别代表叶片和轮盘,模型中各无量纲参数如表 1 所示.该模型的频率节径图如图 2 所示.从图中可以看出,在单独叶片固有频率附近模式非常密集,同时,在 9 节径处发生了频率转向,计算表明^[26,28],该频率附近对失谐极为

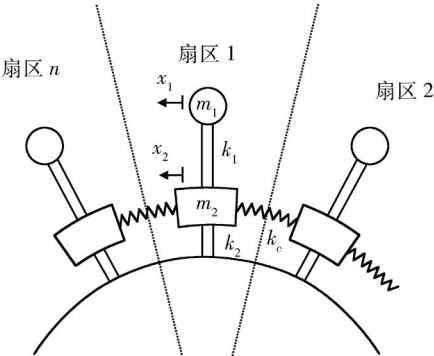


图 1 典型叶盘结构集中参数力学模型

Fig. 1 Lumped-parametric model of a bladed disk

敏感,容易发生振动局部化现象.因此,选取以单独叶片固有频率为中心频率的一个频段进行计算和分析.

表 1 叶盘结构参数

Table 1 Parameters of the example bladed disk

叶片数	叶片质量	轮盘质量	叶片刚度	轮盘刚度	耦合刚度	叶片阻尼
56	1	426	1	1.1	493	0.005

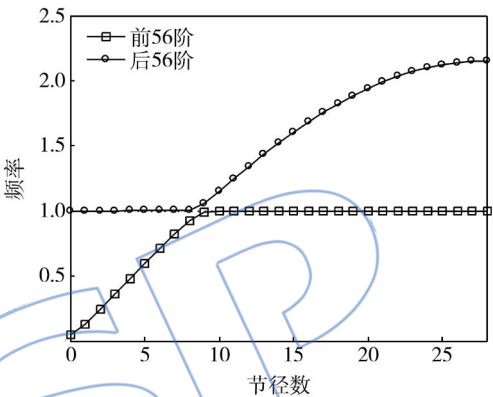


图 2 频率节径图

Fig. 2 Nodal diameter map

3 随机失谐叶盘结构的鲁棒性能分析

文献[25]中利用结构奇异值的上界考虑了刚度随机失谐叶盘结构的鲁棒稳定性及鲁棒性能.这里,同时考虑了结构奇异值的上界和下界,着重考虑随机失谐叶盘结构中激励阶次,阻尼和失谐程度等多个参数对系统鲁棒性能的影响.选取某频段内各频率点上的结构奇异值(由于计算的复杂性,选取其上、下界,并非真实值)的最大值作为衡量系统鲁棒性能的指标.

3.1 激励阶次的影响

许多研究表明,叶盘结构在频率转向处的各阶对失谐的更为敏感.这里考察叶片刚度 k_1 的失谐范围为 $[-0.03, 0.03]$,称随机失谐幅值为 0.03,即叶片刚度在 $\pm 3\%$ 的范围内变化;激励阶次为 7~11 时的结构奇异值的界,选取的频率范围为 $[0.85, 1.15]$,计算结果如图 3 所示.从图中可以看出,频率转向处的 $E = 9$ 对应的结构奇异值的要大于频率转向区外的,说明此时系统的鲁棒性最差,这与以前研究得到的结论是一致的.如果不特别说明,下面几节的计算都是在 $E = 9$ 的

情况下得到的.

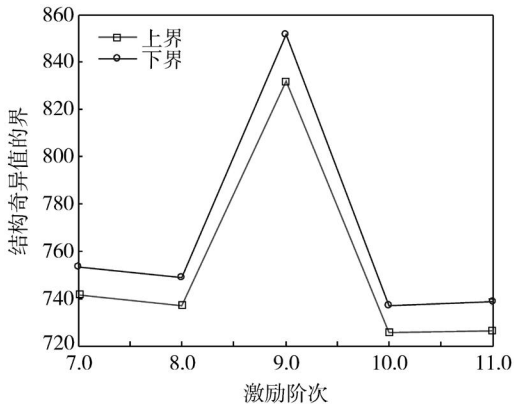
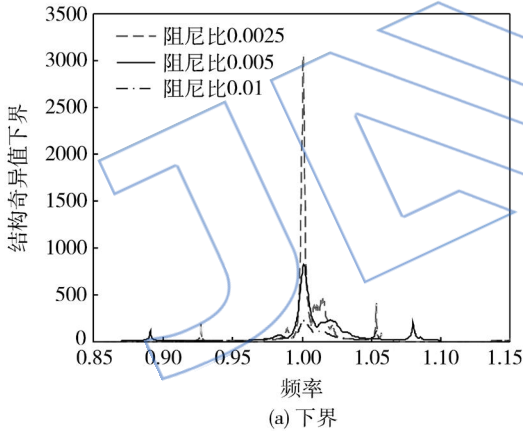


图 3 激励阶次的影响

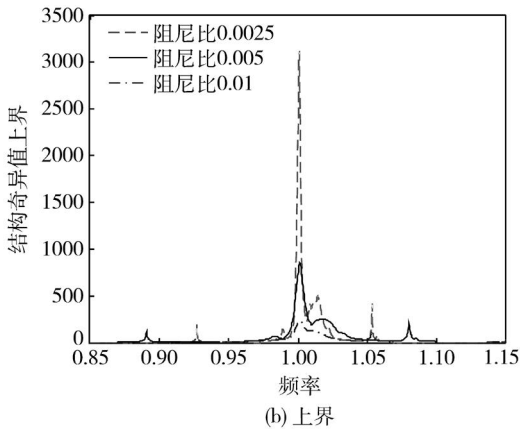
Fig. 3 Influences of excitation order

3.2 阻尼的影响

在同样的叶片刚度失谐情况下,考虑不同的叶片阻尼对系统鲁棒性能的影响.取叶片阻尼 ζ 分别等于 0.0025, 0.005, 和 0.01, 得到的结构奇异值如图 4 所示.从图中可以看出,结构奇异值的



(a) 下界



(b) 上界

图 4 阻尼对结构奇异值的影响

Fig. 4 Influences of damping

最大值出现在模态密集的频率处,并且随着阻尼的增加结构奇异值迅速下降,说明增加阻尼是提高系统鲁棒性能的非常有效途径.

3.3 不同程度刚度失谐的情况

考虑不同程度的刚度随机失谐,频率范围仍为 $[0.85, 1.15]$, 当失谐幅值从 0.01 变化至 0.09 时,结构奇异值的最大值经历了先增大后减小继而又增大的变化过程,如图 5 所示.在所研究的频段内,当随机失谐幅值为 0.03 时,达到一个局部最大值,这说明此时系统的鲁棒性能最差,对失谐最为敏感,称这个失谐幅值为“阈值”.当失谐范围进一步增大时,结构奇异值有所下降,说明此时系统的鲁棒性能反而有所提高,当失谐幅值在 0.06~0.07 左右时,结构奇异值有一个局部最小值,因此可以将失谐水平控制在阈值之外可以提高系统的鲁棒性能.但当失谐幅值继续增加时,系统的鲁棒性又变差.

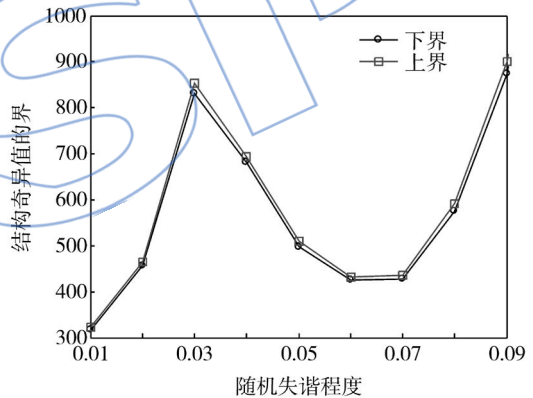


图 5 不同程度刚度失谐情况下的结构奇异值的界

Fig. 5 Bounds of SSV with different stiffness mistuning strengths

3.4 不同程度阻尼失谐的情况

在叶盘结构中,阻尼的失谐也是不可避免的,而且往往在一个更大的范围内变化.取各叶片的标称阻尼 $\zeta = 0.005$, 这里考虑阻尼失谐幅值为 0.1~0.9, 即叶片阻尼分别在 $\pm 10\% \sim \pm 90\%$ 的范围内变化,对应的结构奇异值最大值如图 6 所示.与刚度失谐相比,阻尼失谐时对应的结构奇异值要小得多,说明阻尼失谐对系统鲁棒性能的影响要小于刚度失谐.同时,随着失谐幅值的增加,结构奇异值也增加,但变化并不明显,当阻尼失谐幅值从 0.1 变化至 0.9 时,结构奇异值的上界从 190.2 变化到 218.2.

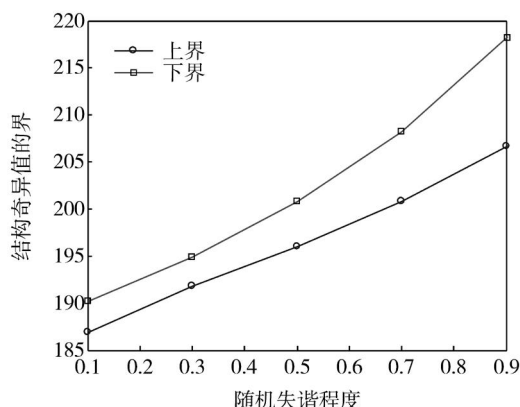


图 6 不同程度阻尼失谐情况下的结构奇异值的界

Fig. 6 Bounds of SSV with different damping mistuning strengths

4 人为失谐对系统鲁棒性能的影响

这里给叶片刚度引入符合谐波形式的人为失谐,即

$$\Delta k_{bi} = A_k \cos \left[2\pi \frac{h(i-1)}{N} \right] \quad (11)$$

其中 Δk_{bi} 为第 i 个叶片刚度的变化, A_k 和 h 分别为人为失谐的幅值和谐波次数. 在实际应用中,人为失谐通常是通过改变叶片的厚度来实现的.

由 3.3 节可知,当随机失谐幅值为 0.03 时系统的鲁棒性最差,这里针对这种随机失谐引入谐波次数为 $h=14, 28$ 的叶片刚度人为失谐,计算得到的结构奇异值的界如图 7 所示. 计算结果表明,当人为失谐幅值为 0.02~0.03 时,系统鲁棒性能明显提升,而后随着人为失谐幅值的增加又有不同程度的恶化. 另外,不同形式的人为失谐的效果也有明显不同,因此在实际应用中应适当选择人

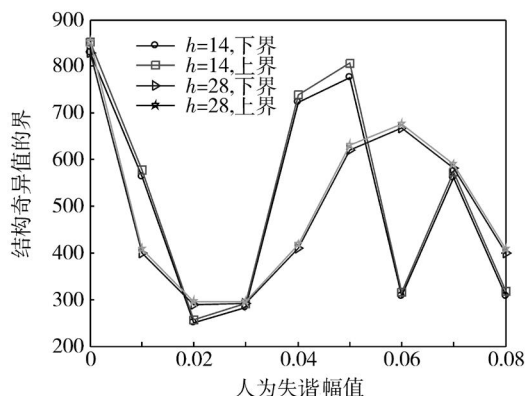


图 7 叶片刚度人为失谐情况下的结构奇异值的界

Fig. 7 Bounds of SSV with different blade intentional mistuning

为失谐的形式和幅值. 应当指出的是,在工程应用中总是要选择最容易实现的人为失谐,即所需叶片种类最少的失谐形式. 本算例中,在增强系统鲁棒性效果相当的情况下,选择 $h=28$ 的人为失谐(实现该失谐方式只需要两种叶片).

5 结 论

本文首先简要给出了系统鲁棒性能分析的建模过程,在此基础上,以结构奇异值为指标,研究了失谐参数对叶盘结构鲁棒性能的影响. 在分析中,考虑了激励阶次,阻尼,失谐程度以及人为失谐的影响,基于文中的算例,可以得到以下结论:

- 1) 与其他阶次相比,频率转向处各阶对失谐参数更为敏感,鲁棒性能最差;
- 2) 阻尼对系统鲁棒性能有重要的作用,增加系统阻尼能大幅提高系统的鲁棒性能;
- 3) 系统结构奇异值的最大值随刚度失谐幅值的增加先增大后减小,将刚度失谐水平控制在阈值之外可以提高系统的鲁棒性能;
- 4) 阻尼失谐的对系统鲁棒性能的影响要远小于刚度失谐,而且结构奇异值的最大值随阻尼失谐幅值的变化也不明显;
- 5) 这里得到的关于系统鲁棒性能的规律在很大程度上与统计计算得到的结果类似,说明结构奇异值也能很好地反映出失谐参数对系统响应特性的影响;
- 6) 适当形式的人为失谐能有效地提高系统的鲁棒性能.

今后的研究可以在系统鲁棒性能分析的基础上,进行控制器的优化设计,以提高系统的鲁棒性,减小随机失谐对系统的不利影响. 同时,由于结构奇异值计算的复杂性,应致力于结构奇异值算法的研究.

参考文献:

- [1] 王建军,李其汉,朱梓根. 失谐叶片-轮盘结构系统振动局部化问题的研究进展[J]. 力学进展,2000,30(4): 517-528.
WANG Jianjun, LI Qihan, ZHU Zigen. Vibratory localization of mistuned bladed disk assemblies—a review[J]. Advances in Mechanics, 2000, 30(4): 517-528. (in Chinese)
- [2] Slater J C, Minkiewicz G R, Blair A J. Forced response of bladed disk assemblies—a survey [R]. AIAA Paper 98-3743, 1998.
- [3] Castanier M P, Pierre C. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration: status and emerging directions [J]. Journal of Propulsion and Power, 2006, 22(2): 384-396.

- [4] Ewins D J. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1969, 9(1): 65-79.
- [5] Kruse M, Pierre C. Forced response of mistuned bladed disks using reduced-order modeling [R]. AIAA-96-1545-CP, 1996.
- [6] Castanier M P, Ottarsson G, Pierre C. Reduced order modeling and vibration analysis of mistuned bladed disk assemblies with shrouds[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbine and Power*, 1999, 121: 515-522.
- [7] Lim S H, Bladah R, Castanier M P, et al. A compact, generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration[R]. AIAA-2003-1545, 2003.
- [8] Yang M T, Griffin J H. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes[J]. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2001, 123(10): 893-900.
- [9] Feiner D M, Griffin J H. A fundamental model of mistuning for a single family of modes[J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 2002, 124(10): 597-605.
- [10] 王建军, 李其汉. 航空发动机失谐叶盘振动减缩模型与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- [11] 王建军, 于长波, 姚建尧, 等. 失谐叶盘振动模态局部化定量描述方法[J]. *推进技术*, 2009, 30(4): 457-461.
WANG Jianjun, YU Changbo, YAO Jianyao, et al. Vibratory mode localization factors of mistuned bladed disk assemblies[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2009, 30(4): 457-461. (in Chinese)
- [12] Ayers J P, Feiner D M, Griffin J H. A reduced-order model for transient analysis of bladed disk forced response[J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 2006, 128(7): 466-473.
- [13] Petrov E P, Vitali R, Haftka R T. Optimization of mistuned bladed discs using gradient-based response surface approximations [R]. AIAA-2000-1522, 2000.
- [14] Petrov E P, Ewins D J. Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disk assemblies[J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 2003, 125(10): 623-631.
- [15] Choi B K, Lentz J. Optimization of intentional mistuning patterns for the reduction of the forced response effects of unintentional mistuning: formulation and assessment[J]. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2003, 125(1): 131-140.
- [16] Scarselli G, Lecce L. Non deterministic approaches for the evaluation of the mistune effects on the rotor dynamics [R]. AIAA-2004-1748, 2004.
- [17] Thompson E A, Becus G A. Optimization of blade arrangement in a randomly mistuned cascade using simulated annealing [R]. AIAA-93-2254, 1993.
- [18] Rivas Guerra A J, Mignolet M P. Maximum amplification of blade response due to mistuning: localization and mode shape aspects of the worst disks[J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 2003, 125(7): 442-454.
- [19] Kenyon J A, Griffin J H, Feiner D M. Maximum bladed disk forced response from distortion of a structural mode [J]. *ASME Journal of Turbomachinery*, 2003, 125(4): 352-363.
- [20] Kenyon J A. Maximum mistuned bladed disk forced response with frequency veering [R]. AIAA-2004-3753, 2004.
- [21] Hou J, Cross C. Minimizing blade dynamic response in a bladed disk through design optimization[J]. *AIAA Journal*, 2005, 43(2): 406-412.
- [22] Rotea M, D'Amato F. New tools for analysis and optimization of mistuned bladed disks [R]. AIAA-2002-4081, 2002.
- [23] Castanier M P, Pierre C. Investigation of the combined effects of intentional and random mistuning on the forced response of bladed disks[R]. AIAA Paper 98-3720, 1998.
- [24] Castanier M P, Pierre C. Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors [J]. *AIAA Journal*, 2002, 40(10): 2077-2086.
- [25] YAO Jianyao, WANG Jianjun, LI Qihan. Robustness analysis of mistuned bladed disk using the upper bound of structured singular value [J]. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2009, 131(3): 032501 (7 pages).
- [26] 姚建尧. 失谐周期结构动态特性和鲁棒性分析[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2006.
YAO Jianyao. Dynamic and robust characteristics analysis of mistuned periodic structures[D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006. (in Chinese)
- [27] 周克敏, Doyle J C, Glover K. 鲁棒与最优控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
- [28] 王建军, 姚建尧, 李其汉. 刚度随机失谐叶盘结构概率模态特性分析[J]. *航空动力学报*, 2008, 23(2): 256-262.
WANG Jianjun, YAO Jianyao, LI Qihan. Probability characteristics of vibratory mode of bladed disk assemblies with random stiffness mistuning[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(2): 256-262. (in Chinese)